CAPÍTULO 3

Aplicaciones de las ecuaciones y las desigualdades

3.1 Aplicaciones de las ecuaciones

En la mayor parte de los casos, para resolver problemas de la práctica es necesario traducir las relaciones que se plantean en los problemas a símbolos matemáticos. A esto se le denomina *modelación*. Los ejemplos siguientes ilustran las técnicas y conceptos elementales. Es necesario examinar cada uno de ellos en forma cuidadosa antes de pasar a los ejercicios.

En el primer ejemplo, se hace referencia a algunos términos de administración relacionados con las empresas industriales. **Los costos fijos** (o *gastos generales*) son la suma de todos los costos que son independientes del nivel de la producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no. Los **costos variables** son la suma de todos los costos que dependen del nivel de producción, como mano de obra y materiales. Los **costos totales** son la suma de los costos variables y los fijos:

costos totales = costos variables + costos fijos.

Los **ingresos totales** son el efectivo que el fabricante recibe por la venta de su producción. Están dados por:

ingresos totales = (precio por unidad) (número de unidades vendidas).

Las **utilidades** son los ingresos totales menos los costos totales:

utilidades = ingresos totales − costos totales.

EJEMPLO 1

Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de \$6 *(dólares) por unidad y costos fijos de* \$80,000. *Cada unidad tiene un precio de venta de* \$10. *Determine el número de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades de* \$60,000.

Sea q el número de unidades que deben ser vendidas. (En muchos problemas q representa una cantidad.) Entonces, los costos variables (en dólares) son $6q$. Por lo tanto, los costos *totales* para el caso son $6q + 80\ 000$. Los ingresos totales por la venta de q unidades son $10q$. Y, dado que

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales},$$

el modelo para el problema es

$$60{,}000 = 10q - (6q + 80{,}000).$$

que da como resultado

$$\begin{aligned} 60{,}000 &= 10q - 6q - 80{,}000, \\ 140{,}000 &= 4q, \\ 35{,}000 &= q. \end{aligned}$$

Así que es necesario vender 35,000 unidades para obtener utilidades de \$60,000.

EJEMPLO 2

Una compañía fabrica ropa deportiva para dama y está planeando vender su nueva línea de pantalones a tiendas que venden al menudeo. Los costos para el detallista serían de \$33 *(dólares) por conjunto. Para conveniencia del detallista, el fabricante anexará una etiqueta de precio a cada conjunto. ¿Qué cantidad se debe imprimir en la etiqueta para que el comerciante pueda reducir su precio en* 20% *en una oferta promocional y obtener utilidades de* 15% *sobre los costos?*

Aquí se usa la siguiente relación

$$\text{precio de venta} = \text{costo por conjunto} + \text{utilidad por conjunto}.$$

Sea p el precio marcado en la etiqueta, por conjunto, en dólares. Durante la oferta, el detallista recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 33, más las utilidades, (0.15)(33). Por ello

$$\text{precio de venta} = \text{costo} + \text{utilidades}.$$

$$\begin{aligned} p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33), \\ 0.8p &= 37.95, \\ p &= 47.4375. \end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, la compañía debe imprimir un valor de \$47.44 en la etiqueta del precio.

EJEMPLO 3

Se invirtió un total de \$10,000 (dólares) en dos empresas, A y B. Al final del primer año, A y B produjeron rendimientos de 6% y de $5\frac{3}{4}$%, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cómo se distribuyó la cantidad original, si el total que se ganó fue de \$588.75?

Sea x la cantidad (en dólares) que se invirtió al 6%. Entonces $10{,}000 - x$ se invirtieron al $5\frac{3}{4}$%. El interés que se ganó fue de $(0.06)(x)$ y $(0.0575)(10{,}000 - x)$, que hacen un total de 588.75. Por tanto

$$\begin{aligned}(0.06)x + (0.0575)(10{,}000 - x) &= 588.75,\\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75,\\ 0.0025x &= 13.75,\\ x &= 5500.\end{aligned}$$

De manera que se invirtieron \$5,500 al 6% y \$10,000 − \$5,500 = \$4500 al $5\frac{3}{4}$%.

EJEMPLO 4

Se acordó en el consejo de administración de una empresa amortizar parte de sus bonos en dos años. En ese momento, se requerirían \$1,102,500. Supóngase que en el presente se apartan \$1,000,000. ¿A qué tasa de interés compuesto anual tendrá que invertirse esa cantidad para que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?

Sea r la tasa de interés anual que se requiere. Al final del primer año, la cantidad acumulada será de \$1,000,000 más los intereses, \$1,000,000r, lo que dará un total de

$$1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000r = 1{,}000{,}000(1 + r).$$

Con el interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de $1{,}000{,}000(1 + r)$, más los intereses sobre esta cantidad, que serán de $[1{,}000{,}000(1 + r)]r$. Por tanto, el valor total al final del segundo año será de $1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r$. Esta cantidad debe ser igual a \$1,102,500:

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r = 1{,}102{,}500. \qquad (1)$$

Dado que $1{,}000{,}000(1 + r)$ es factor común de los dos términos del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned}1{,}000{,}000(1 + r)(1 + r) &= 1{,}102{,}500,\\ 1{,}000{,}000(1 + r)^2 &= 1{,}102{,}500,\\ (1 + r)^2 &= \frac{1{,}102{,}500}{1{,}000{,}000} = \frac{11{,}025}{10{,}000} = \frac{441}{400},\\ 1 + r &= \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20},\\ r &= -1 \pm \frac{21}{20}.\end{aligned}$$

Por ello, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o bien $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la Ecuación (1), se rechaza -2.05, puesto que se desea que r sea positiva. De ahí que $r = 0.05$ y, por lo tanto, la tasa que se desea es de 5%.

En ocasiones, es posible que haya más de una forma de modelar un problema planteado en términos verbales, tal como se muestra en el Ejemplo 5.

EJEMPLO 5

Una empresa de bienes raíces es propietaria de un conjunto de departamentos que consta de 70 *de ellos. Se puede rentar cada uno de los departamentos en* \$250 *(dólares) al mes. Sin embargo, por cada* \$10 *que se aumenten a la renta cada mes se tendrán dos departamentos desocupados sin posibilidad de alquilarlos. La empresa desea obtener* \$17,980 *mensuales con las rentas. ¿Cuánto debe cobrar por el alquiler de cada departamento?*

Método I. Supóngase que r es la renta (en dólares) que se cobrará por departamento. Con esto, el aumento sobre el nivel de \$250 es $r - 250$. Así que el número de aumentos de \$10 es $\frac{r - 250}{10}$. Puesto que cada aumento de \$10 da como resultado dos departamentos vacíos, el número total de éstos será $2\left(\frac{r - 250}{10}\right)$. En consecuencia, el número total de departamentos rentados será $70 - 2\left(\frac{r - 250}{10}\right)$. Puesto que

$$\text{renta total} = (\text{renta por departamento})(\text{número de departamentos rentados}),$$

se tiene que

$$17{,}980 = r\left[70 - \frac{2(r - 250)}{10}\right],$$

$$17{,}980 = r\left[70 - \frac{r - 250}{5}\right],$$

$$17{,}980 = r\left[\frac{350 - r + 250}{5}\right],$$

$$89{,}900 = r[600 - r].$$

Así que

$$r^2 - 600r + 89{,}000 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática

$$r = \frac{600 \pm \sqrt{(-600)^2 - 4(1)(89{,}900)}}{2(1)}$$

$$= \frac{600 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{600 \pm 20}{2} = 300 \pm 10.$$

La renta de cada departamento debe ser de \$310 o \$290.

Método II. Supóngase que n es el número de aumentos de \$10. Entonces, el aumento de la renta es de $10n$ y habrá $2n$ departamentos desocupados. Puesto que

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

se tiene que

$$
\begin{aligned}
17{,}980 &= (250 + 10n)(70 - 2n), \\
17{,}980 &= 17{,}500 + 200n - 20n^2, \\
20n^2 - 200n + 480 &= 0, \\
n^2 - 10n + 24 &= 0, \\
(n - 6)(n - 4) &= 0.
\end{aligned}
$$

Por ello, $n = 6$ o bien $n = 4$. La renta por departamento debe ser de $250 + 10(6) =$ \$310 o bien $250 + 10(4) =$ \$290.

EJERCICIOS 3.1

1. Una firma industrial fabrica un producto que tiene costos variables de \$2.20 (dólares) por unidad. Si los costos fijos son de \$95,000 y se vende cada unidad en \$3, ¿cuántas unidades deben venderse para que la compañía obtenga utilidades de \$50,000?

2. Los administradores de una compañía desean saber el total de unidades que deben venderse para que la firma obtenga utilidades de \$100,000. Se tienen disponibles los siguientes datos: Precio unitario de venta, \$20; costos variables por unidad, \$15; costos fijos totales, \$600,000. Determínense las ventas que se requieren, en unidades.

3. Una persona desea invertir \$20,000 en dos empresas, de manera que sus ingresos totales sean de \$1,440 al año. Una compañía paga 6% anual; la otra tiene un mayor riesgo y ofrece $7\frac{1}{2}$ % anual. ¿Cuánto debe invertir en cada una de ellas?

4. Una persona invirtió \$20,000. Una parte a una tasa de interés de 6% anual, y el resto al 7% anual. El total de intereses ganados al final del primer año fue equivalente a una tasa anual del $6\frac{3}{4}$ % sobre el total de los \$20,000. ¿Cuánto se invirtió según cada tasa de interés?

5. El costo de un producto es de \$3.40 para el vendedor al menudeo. Si éste desea obtener utilidades de 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio deberá vender el producto?

6. Dentro de dos años, una empresa requerirá \$1,123,600, con objeto de amortizar ciertos bonos. Si la compañía invierte ahora \$1,000,000 con este propósito, ¿qué tasa de interés compuesto anual debe recibir sobre esta cantidad con objeto de estar en posibilidades de amortizar los bonos?

7. Dentro de dos años, una compañía emprenderá un programa de expansión. Ha decidido invertir \$2,000,000 en estos momentos, para que dentro de dos años el valor total de la inversión sea de \$2,163,200, que es el monto que requerirá para la expansión. ¿Qué tasa de interés compuesto anual debe utilizar la compañía para lograr su propósito?

8. En una compañía se sabe que si se venden q unidades de un producto, sus ingresos totales por las ventas serán de $100\sqrt{q}$. Si los costos variables por unidad son de \$2 y los costos fijos son de \$1200, encuéntrense los valores de q para los cuales

ingresos totales por venta = costos variables + costos fijos

(es decir, una utilidad igual a cero).

9. En un dormitorio estudiantil se da albergue a 210 estudiantes. En este otoño se dispone e 76 cuartos para alumnos de nuevo ingreso. En promedio, 95% de los alumnos de primer ingreso que solicitan cuartos los obtienen. ¿Cuántas solicitudes de habitación deben enviar los estudiantes si desean obtener 76 confirmaciones?

10. Se entrevistó a un grupo de personas, y 20% de ellas, 700 en número, estuvieron en favor de un producto nuevo, por encima de la marca con mejores ventas. ¿A cuántas personas se entrevistó?

11. Se reportó que en cierto reclusorio para mujeres las guardianas, a las que se denomina celadoras, recibieron 30% (o $200) menos, al mes, que sus contrapartes masculinas, los celadores. Calcule el salario anual de los guardianes masculinos. Redondee la respuesta al dólar más cercano.

12. Hace pocos años, los conductores de camiones para el transporte de cemento se fueron a la huelga durante 46 días. Antes de la huelga, estos conductores ganaban $7.50 por hora y trabajaban 260 días al año, con ocho horas de trabajo al día. ¿Qué porcentaje de aumento se requiere en sus ingresos anuales para recuperar el tiempo perdido en un año?

13. Un fabricante de cartuchos para juegos para video vende cada uno en $19.95. El costo de manufactura de cada pieza es de $14.95. Los costos fijos mensuales son de $8,000. Durante el primer mes de ventas de un juego nuevo, ¿cuántos cartuchos deben venderse para que el fabricante salga "a mano" (es decir, para que los ingresos totales sean iguales a los costos totales)?

14. Una sociedad de inversiones compró en $5000 (dólares) un bono de una compañía petrolera. El bono produce el 8% anual. Ahora, la sociedad desea comprar acciones de una compañía que vende productos para hospitales. Las acciones se venden a $20 cada una de ellas y ofrecen dividendos de $0.50 por acción al año. ¿Cuántas acciones debe adquirir la sociedad para que su inversión total en acciones y bonos produzca el 5% anual?

15. En calidad de prestación para sus empleados, una compañía estableció un plan de atención médica para la vista. Según el plan, cada año la compañía pagará los primeros $10 de gastos en los que cada empleado incurra por atención óptica, y 80% de todos los gastos adicionales, hasta un pago *total* máximo de $60. Calcule los gastos totales anuales de atención oftálmica que cubre este programa, por empleado.

16. En cierto intervalo de tiempo, una empresa fabricante de barras de caramelo encontró que el 2% de su producto es rechazado por defectos.

(a) Si se fabrican c barras de caramelo al año, ¿cuántas de ellas puede esperar el fabricante que sean rechazadas?

(b) Este año, se proyecta que el consumo anual de esta golosina será de 2,000,000 de barras. ¿Aproximadamente cuántas tendrían que fabricarse si se toman en cuenta las que se rechazan?

17. Supóngase que los consumidores adquirirán q unidades de un producto, si el precio es de $(80 - q)/4$ *por unidad*. ¿Cuántas unidades deben venderse para que los ingresos por ventas sean de $400?

18. ¿En qué tiempo se duplicaría una inversión con tasa de interés simple de 5% anual? [*Sugerencia:* Véase el Ejemplo 6(a) de la Sección 1.1, y exprese 5% como 0.05.]

19. El inventor de un juguete nuevo ofrece a una empresa fabricarlo y venderlo mediante un solo pago de $25,000 (dólares). Después de estimar que las posibilidades de ventas futuras a plazo mayor de un año son prácticamente inexistentes, los administradores de la compañía están ponderando la siguiente propuesta alternativa: dar un solo pago de $2000 y regalías de $0.50 por cada unidad que se venda. ¿Cuántas unidades deben venderse durante el primer año para que esta alternativa le resulte al inventor tan económicamente atractiva como su ofrecimiento original? (*Sugerencia:* Determine el punto en el que los ingresos de ambas propuestas son iguales?)

20. El estacionamiento de una compañía tiene 120 pie de largo y 80 de ancho. Debido a un aumento en el personal, se decide duplicar el área del estacionamiento añadiendo franjas de igual anchura en forma de escuadra (para situar al extremo y a un lado). Determine dicha anchura.

21. Usted es el asesor financiero en jefe de una empresa propietaria de un complejo de oficinas que cuenta con 50 *suites*. Se puede rentar cada una de éstas en $400 mensuales. Sin embargo, por cada $20 de aumento por mes habrá dos de ellas desocupadas, sin posibilidad de rentarlas. La compañía desea obtener un total de $20,240 mensuales con la renta del total del complejo. Se pide determinar la renta que debe cobrarse por cada *suite*. ¿Cuál sería su respuesta?

22. Hace seis meses, una compañía de inversiones tenía una cartera de $3,000,000 (dólares), formada

por acciones AAA y acciones especulativas. Desde entonces, el valor de las inversiones AAA se ha incrementado en $\frac{1}{10}$, en tanto que el valor de las acciones especulativas ha disminuido en una proporción equivalente. El valor actual de la cartera es de \$3,140,000. ¿Cuál es el valor *actual* de las inversiones AAA?

23. Los ingresos mensuales I de cierta compañía, están dados por $I = 800p - 7p^2$, en donde p es el precio en dólares del producto que fabrica. ¿A qué precio se obtendrían ingresos de \$10,000, si el precio debe ser superior a \$50?

24. La *razón de precio a utilidad* (o razón de P/U) de una compañía, es el cociente que se obtiene dividiendo el valor de mercado de una de sus acciones comunes en circulación entre las utilidades por acción. Si la razón de P/U aumenta en 10%, y las utilidades por accion aumentan en 20%, determine el aumento porcentual en el valor de mercado por acción, para las acciones comunes.

25. Cuando el precio de un producto es de p dólares por unidad, supóngase que un fabricante ofrece $2p - 8$ unidades del producto al mercado, y que la demanda de los consumidores será de $300 - 2p$ unidades. Se dice que el mercado está en equilibrio cuando el valor de p hace que la oferta sea igual a la demanda. Encuéntrese el valor de p.

26. Repítase el Problema 25 para las siguientes condiciones: a un precio de p dólares por unidad, la oferta es de $3p^2 - 4p$ y la demanda es de $24 - p^2$.

27. Por razones de seguridad, una compañía resguardará un área rectangular de 11,200 pies cuadrados que se encuentra en la parte trasera de su planta. Un lado estará limitado por el edificio y los otros tres serán bardados (véase la Figura 3.1). Si se ocupan 300 pies de barda, ¿cuáles serán las dimensiones del área rectangular?

28. Una firma industrial está diseñando el empaque para su producto. Parte del mismo será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, que se cortará con orillas de tres pulgadas cuadradas en cada esquina y se doblará en los lados (véase la Figura 3.2). La caja deberá contener 75 pulgadas cúbicas. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja cuadrada de aluminio que se debe utilizar?

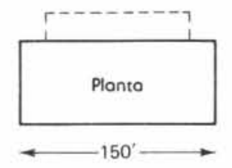


FIGURA 3.1

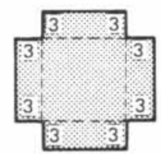


FIGURA 3.2.

29. Una compañía dulcera fabrica una golosina muy popular. La barra, que tiene forma rectangular, de 10 centímetros (cm) de longitud, 5 cm de ancho y 2 cm de grueso (véase la Figura 3.3). Debido a los costos crecientes, la compañía ha decidido reducir el volumen de la barra en un 28%, lo cual es bastante drástico. El grosor será igual, pero se reducirá tanto la longitud como el ancho en cantidades iguales. ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones de lo ancho y lo largo de la nueva barra?

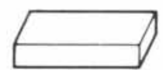


FIGURA 3.3

30. Una compañía dulcera fabrica una golosina con forma de rosca; véase la Figura 3.4. Debido a los costos crecientes, la compañía reducirá el volumen de su producto en 20%. Para hacer esto, mantendrá el mismo grosor y el mismo radio exterior, pero ampliará el radio interior. En la actualidad, el grosor es de

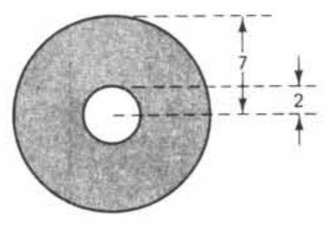


FIGURA 3.4

2 milímetros (mm), el radio interior es de 2 mm, y el radio exterior, de 7 mm. Halle el radio interior de la golosina con las nuevas dimensiones. (*Sugerencia:* El volumen D de un disco sólido es $\pi r^2 h$, en donde r es el radio y h es el grosor.)

31. Un *saldo compensatorio* se refiere a la práctica mediante la cual un banco pide a quien solicita un crédito mantener un depósito de cierta proporción del crédito, durante el término de éste. Por ejemplo, si una empresa obtiene un crédito de $100,000 y requiere un saldo compensatorio de 20%, tendría que dejar $20,000 de depósito y utilizar los $80,000 restantes. Para cubrir los gastos de renovación de sus herramientas, una fábrica debe obtener un préstamo de $95,000. El banco, con el que no ha tenido tratos previos, exige un saldo compensatorio de 15%. Redondeando al millar de dólares más cercano, ¿cuál debe ser el importe total del préstamo, para obtener los fondos necesarios?

32. Una compañía que fabrica maquinaria tiene un plan de incentivos para sus vendedores. Cada uno obtiene $20 (dólares) de comisión por cada unidad que vende. Por *cada* máquina vendida, por encima de 600, se aumentará la comisión en 0.02 por cada una. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas sería de $20.04. ¿Cuántas máquinas debe colocar un comisionista para obtener $15,400?

33. Una compañía fraccionadora de terrenos adquirió uno en $7,200. Se había recuperado el costo total del terreno después de vender la totalidad, excepto 20 acres, con utilidades de $30 por acre. ¿Cuántos acres se vendieron?

34. El *margen de utilidad* de una empresa son las utilidades netas divididas entre las ventas totales. El margen de utilidad de una compañía aumentó en 0.02, con respecto al año pasado. En ese año, la firma vendió sus productos a $3.00 (dólares) por unidad y obtuvo utilidades netas de $4,500. Este año, se aumentó el precio del producto en $0.50 por unidad, se vendieron 2,000 más y se obtuvieron utilidades netas de $7,140. La compañía nunca tuvo un margen de utilidad superior al 0.15. ¿Cuántos productos se vendieron el año pasado, y cuántos en éste?

35. Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de fabricar cada unidad de A es $2 más que el de fabricar B. Los costos de producción de A y B son de $1,500 y $1,000, respectivamente, y se manufacturaron 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades se fabricaron de cada uno de los dos productos?

3.2 Desigualdades lineales

Supóngase que a y b son dos puntos que se encuentran sobre la recta de los números reales. En este caso, puede suceder que a y b coincidan, que a esté a la izquierda de b o que a esté a la derecha de b (véase la Figura 3.5).

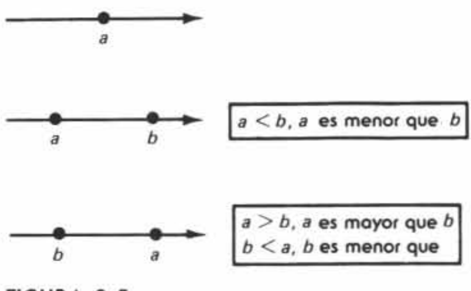


FIGURA 3.5

Si a y b coinciden, entonces $a = b$. Si a está a la izquierda de b, se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$, en donde el *símbolo de desigualdad* "$<$", se lee como "es menor que". Por otro lado, si a está a la derecha de b, se dice que a es mayor que b y se escribe $a > b$. Escribir $a > b$ es equivalente a escribir $b < a$.

Otro símbolo de desigualdad es "$\leq$", que se lee como "es menor que o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o bien $a = b$. De manera similar, el símbolo "$\geq$" se define como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o bien $a = b$. En este caso, se dice que "a es mayor que o igual a b".

Se utilizarán las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, puesto que existe una correspondencia de uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta. Por ello, se puede hablar de los puntos -5, -2, 0, 7 y 9 y se puede escribir $7 < 9$, $-2 > -5$, $7 \leq 7$ y $7 \geq 0$ (véase la Figura 3.6). Resulta evidente que si $a > 0$, entonces a es positivo; si $a < 0$, entonces a es negativo.



FIGURA 3.6

Supóngase que $a < b$ y x se encuentra entre a y b (véase la Figura 3.7). Entonces, no sólo $a < x$, sino que $x < b$. Se señala esto escribiendo $a < x < b$. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$ (véase la Figura 3.6).

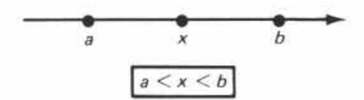


FIGURA 3.7

Al definir una desigualdad en la parte que sigue, se utilizará la relación menor que ($<$), pero también se aplican los demás símbolos ($>$, $\geq$, $\leq$).

DEFINICIÓN

*Una **desigualdad** es un planteamiento que establece que un número es menor que otro.*

Por supuesto, se representan las desigualdades por medio de símbolos de desigualdad. Si en dos desigualdades sus símbolos apuntan en la misma dirección, entonces se dice que las desigualdades tienen el *mismo sentido*. Si no es así, se dice que tienen *sentidos opuestos*, o que una tiene el *sentido inverso* de la otra. Por lo tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene sentido opuesto a $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores para los cuales la desigualdad se verifica. Esto implica utilizar ciertas reglas que se enuncian enseguida.

1. *Si se suma o se resta el mismo número en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que la original.* En términos simbólicos,

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \quad \text{y} \quad a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$ y $7 + 3 < 10 + 3$.

2. *Si se multiplican o se dividen ambos lados de una desigualdad por el mismo número **positivo**, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que la desigualdad original.* En términos simbólicos,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, puesto que $3 < 7$ y $2 > 0$, entonces $3(2) < 7(2)$. También, $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

3. *Si se multiplican o se dividen ambos lados de una desigualdad por el mismo número **negativo**, entonces la desigualdad resultante tiene un sentido **opuesto** a la desigualdad original.* Simbólicamente,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(-c) > b(-c) \text{ y } \frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}.$$

$$\text{Por ejemplo, } 4 < 7, \text{ pero } 4(-2) > 7(-2). \text{ También } \frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}.$$

4. *Se puede remplazar cualquier lado de una desigualdad por una expresión equivalente.* Simbólicamente,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

$$\text{Por ejemplo, si } x < 2 \text{ y } x = y + 4, \text{ entonces } y + 4 < 2.$$

5. *Si ambos lados de una desigualdad son positivos o negativos, entonces sus respectivos recíprocos* son desiguales en el sentido **inverso**.* Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

6. *Si ambos lados de una desigualdad son positivos y se elevan a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que la desigualdad original.* Por ello, si $a > b > 0$ y $n > 0$, entonces

$$a^n > b^n \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Por ejemplo, $9 > 4$ y, por lo tanto, $9^2 > 4^2$ y $\sqrt{9} > \sqrt{4}$.

El resultado de aplicar las reglas 1-4 a una desigualdad se denomina *desigualdad equivalente*. Es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la desigualdad original. Se aplicarán estas reglas a *desigualdades lineales*.

DEFINICIÓN

*Una **desigualdad lineal** en la variable x es una desigualdad que puede escribirse en la siguiente forma*

$$ax + b < 0 \quad \text{o bien} \quad ax + b \leq 0,$$

en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

---

* El *recíproco* de un número diferente de 0, a, se define como $\frac{1}{a}$.

En los ejemplos siguientes de resolución de desigualdades lineales, se indica en el lado derecho la propiedad que se utiliza. En cada uno de los pasos, se remplazará la desigualdad dada con otra equivalente, hasta que la solución sea evidente.

EJEMPLO 1

Resolver las siguientes desigualdades.

a. $2(x - 3) < 4$.

$$\begin{aligned} 2(x - 3) &< 4, & \\ 2x - 6 &< 4 & (4), \\ 2x - 6 + 6 &< 4 + 6 & (1), \\ 2x &< 10 & (4), \\ \frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} & (2), \\ x &< 5. & \end{aligned}$$

Todas las desigualdades son equivalentes. De modo que, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Se escribe en forma simple la solución como $x < 5$. En términos geométricos, se puede representar esto mediante el segmento de trazo más grueso marcado en la Figura 3.8. El signo de paréntesis indica que 5 *no está incluido* en la solución.



FIGURA 3.8

$x \geq -\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}$

FIGURA 3.9

b. $3 - 2x \leq 6$.

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\leq 6, & \\ -2x &\leq 3 & (1) \\ x &\geq -\frac{3}{2} & (3) \end{aligned}$$

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$. Esto se representa geométricamente en la Figura 3.9. El símbolo de corchete señala que $-\frac{3}{2}$ *está incluido* en la solución.

EJEMPLO 2

Resolver $\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4)$.

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}(s - 2) + 1 &> -2(s - 4), & \\ 2[\tfrac{3}{2}(s - 2) + 1] &> 2[-2(s - 4)] & (2), \\ 3(s - 2) + 2 &> -4(s - 4), & \\ 3s - 4 &> -4s + 16, & \end{aligned}$$

$$7s > 20 \quad (1),$$

$$s > \frac{20}{7} \quad (2).$$

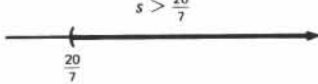


FIGURA 3.10

Véase la Figura 3.10.

EJEMPLO 3

Resolver las siguientes desigualdades

a. $2(x - 4) - 3 > 2x - 1$.

$$2(x - 4) - 3 > 2x - 1,$$
$$2x - 8 - 3 > 2x - 1,$$
$$-11 > -1.$$

Puesto que nunca es cierto que $-11 > -1$, no existe solución alguna y el conjunto solución es $\varnothing$.

b. $2(x - 4) - 3 < 2x - 1$.

Procediendo de la misma forma que en (a), se obtiene $-11 < -1$. Esto se verifica para todos los números reales x. Se escribe la solución como $-\infty < x < \infty$ (véase la Figura 3.11). Los símbolos $-\infty$ y ∞ no son números, sino simplemente una ayuda para señalar que la solución son todos los números reales.



FIGURA 3.11

Con frecuencia se utilizará el término *intervalo* para describir ciertos conjuntos de números reales. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales para los cuales $a \leq x \leq b$ se denomina **intervalo cerrado** e incluye los *extremos* a y b. Se le denota mediante $[a, b]$. El conjunto de todos los números x para los cuales $a < x < b$ se denomina **intervalo abierto** y se denota mediante (a, b). Los extremos *no* son parte de este conjunto (véase la Figura 3.12).

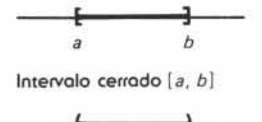


FIGURA 3.12.

$(a, b]$ — $a < x \leq b$

$[a, b)$ — $a \leq x < b$

$[a, \infty)$ — $x \geq a$

(a, ∞) — $x > a$

$(-\infty, a]$ — $x \leq a$

$(-\infty, a)$ — $x < a$

$(-\infty, \infty)$ — $-\infty < x < \infty$

FIGURA 3.13

Extendiendo estos conceptos, se tienen los intervalos que se muestran en la Figura 3.13, en donde los símbolos ∞ y $-\infty$no son números, sino simplemente una ayuda para señalar que el intervalo se extiende en forma indefinida en alguna dirección.

EJERCICIOS 3.2

En los problemas **1-34**, *resolver las desigualdades y representar las respuestas en forma geométrica en la recta de los números reales.*

1. $3x > 12.$

2. $4x < -2.$

3. $4x - 13 \leq 7.$

4. $3x \geq 0.$

5. $-4x \geq 2$

6. $2y + 1 > 0.$

7. $3 - 5s > 5.$

8. $4s - 1 < -5.$

9. $3 < 2y + 3.$

10. $6 \leq 5 - 3y.$

11. $2x - 3 \leq 4 + 7x.$

12. $-3 \geq 8(2 - x).$

13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x).$

14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1.$

15. $2(3x - 2) > 3(2x - 1).$

16. $3 - 2(x - 1) \leq 2(4 + x).$

17. $x + 2 < \sqrt{3} - x.$

18. $\sqrt{2}\,(x + 2) > \sqrt{8}\,(3 - x).$

19. $\frac{5}{3}x < 10.$

20. $-\frac{1}{2}x > 6.$

21. $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1.$

22. $\frac{4y - 3}{2} \geq \frac{1}{3}.$

23. $4x - 1 \geq 4(x - 2) + 7.$

24. $0x \leq 0.$

25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}.$

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}.$

27. $2x + 3 \geq \frac{1}{2}x - 4.$

28. $4x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x.$

29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r.$

30. $\frac{7}{4}t > -\frac{2}{3}t.$

31. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}.$

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}.$

33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434.$

34. $\frac{5y - 1}{-3} < \frac{7(y + 1)}{-2}.$

35. Durante cada uno de los meses del año pasado, una compañía obtuvo utilidades que fueron superiores a \$37,000 pero inferiores a \$53,000. Si S representa las utilidades totales del año, describir S utilizando desigualdades.

36. Utilizando desigualdades, representar mediante símbolos el siguiente enunciado: El número de horas de trabajo, x, que se requieren para fabricar un producto, no es menor que $2\frac{1}{2}$ ni mayor que 4.

3.3 Aplicaciones de las desigualdades

En ocasiones, resolver problemas planteados en forma verbal implica desigualdades, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Para un fabricante de termostatos, el costo combinado de mano de obra y materiales es de \$5 por unidad. Los costos fijos (los costos en los que se incurre en un lapso dado sin que importe la cantidad que se fabrique) son de \$60,000 (dólares). Si el precio de venta de un termostato es de \$7, ¿cuántos deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

Sea q el número de termostatos que deben venderse. Entonces, su costo es $5q$. Por ello, el costo total para la compañía es así de $5q + 60{,}000$. Los ingresos totales por la venta de q aparatos será $7q$. Ahora bien,

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales},$$

y se desea que las utilidades > 0. Por lo tanto,

$$\text{ingresos totales} - \text{costos totales} > 0.$$

$$7q - (5q + 60{,}000) > 0,$$

$$2q > 60{,}000,$$

$$q > 30{,}000.$$

Por lo tanto, se deben vender cuando menos 30,001 termostatos para que la compañía obtenga utilidades.

EJEMPLO 2

Un constructor debe decidir si ha de rentar o comprar una máquina excavadora. Si la rentara, tendría que pagar \$600 (dólares) al mes (sobre una base anual), y el costo diario (gasolina, aceites y el conductor) sería de \$60 por cada día que se utilizara. Si la comprara, su costo fijo anual sería de \$4000, y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de \$80 por día. ¿Cuál es el número mínimo de días al año, que tendría que utilizar la máquina para justificar el rentarla en vez de comprarla?

Sea d el número de días que se utiliza la máquina al año. Si se renta, los costos anuales totales estarían formados por los pagos de renta, que serían de (12)(600) y los cargos diarios de $60d$. Si se compra la máquina, el costo anual es de $4{,}000 + 80d$. Se desea que

$$\text{costo}_{\text{renta}} < \text{costo}_{\text{compra}},$$

$$12(600) + 60d < 4000 + 80d,$$

$$7200 + 60d < 4000 + 80d,$$

$$3200 < 20d,$$

$$160 < d.$$

Por ello, el constructor debe utilizar la máquina cuando menos 161 días para justificar su alquiler.

EJEMPLO 3

La *razón de circulante* en un negocio es el cociente de sus activos circulantes (como efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar) entre sus pasivos circulantes (como préstamos a corto plazo e impuestos por pagar).

Después de consultar al contralor, el presidente de una empresa decide solicitar un préstamo a corto plazo para aumentar el inventario. La compañía tiene activos circulantes por \$350,000 *y pasivos circulantes por* \$80,000. *¿Cuánto es lo que puede obtener en préstamo si se desean que su razón de circulante no sea inferior a 2.5? (Nota: Los fondos que se recibirían se consideran como activos circulantes, y el préstamo, como pasivos circulantes.)*

Si x denota el monto que la compañía puede obtener en préstamo, entonces sus activos circulantes serán de $350,000 + x$ y sus pasivos circulantes serán de $\$80,000 + x$. Por consiguiente,

$$\text{razón de circulante} = \frac{\text{activos circulantes}}{\text{pasivos circulantes}} = \frac{350,000 + x}{80,000 + x}.$$

Se desea

$$\frac{350,000 + x}{80,000 + x} \geq 2.5.$$

Dado que x es positiva, también lo es $80,000 + x$. Por ello se pueden multiplicar ambos lados de la desigualdad por $80,000 + x$ y el sentido de la misma no se altera.

$$350,000 + x \geq 2.5(80,000 + x),$$

$$150,000 \geq 1.5x,$$

$$100,000 \geq x.$$

De modo que se pueden obtener hasta \$100,000 por préstamo y seguir manteniendo una razón de circulante no menor de 2.5.

EJEMPLO 4

Una compañía editorial encuentra que el costo de publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$0.38 *(de dólar). Los ingresos provenientes de los distribuidores son de*

$0.35 *(dólares) por copia. Los ingresos por publicidad son del* 10% *de los ingresos que se reciben de los distribuidores, para todos los ejemplares que se venden por encima de* 10,000. *¿Cuál es el número mínimo de ejemplares que se deben vender, para que la compañía obtenga utilidades?*

Sea q el número de ejemplares que se venden. Los ingresos que se obtienen de los distribuidores son $0.35q$, y los ingresos por publicidad son $(0.10)[(0.35)(q - 10{,}000)]$. El costo total de publicación es de $0.38q$. Dado que utilidad = ingresos totales − costos totales, se desea que

$$\text{ingresos totales} - \text{costos totales} > 0.$$

$$0.35q + (0.10)[(0.35)(q - 10{,}000)] - 0.38q > 0,$$
$$0.35q + 0.035q - 350 - 0.38q > 0,$$
$$0.005q - 350 > 0,$$
$$0.005q > 350,$$
$$q > 70{,}000.$$

Por ello, el número total de ejemplares debe ser superior a 70,000. Es decir, se deben vender cuando menos 70,001 ejemplares para garantizar una utilidad.

EJERCICIOS 3.3

1. Una firma industrial fabrica un producto con precio unitario de venta de $20 (dólares) y costo unitario de $15. Si los costos fijos son de $600,000, determine el número mínimo de unidades que se deben vender para que la compañía obtenga utilidades.

2. Para fabricar una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo de los materiales es de $2.50 (dólares) y el costo de la mano de obra de $4. Los gastos generales constantes, sin importar el volumen de ventas, son de $5,000. Si el precio para los mayoristas es de $7.40 por unidad, determínese el número de unidades que debe vender la compañía para obtener utilidades.

3. Una administradora de negocios desea determinar la diferencia entre los costos de ser propietaria y de rentar un automóvil. Puede rentar un auto pequeño por $135 (dólares) al mes (sobre una base anual). Según este plan, el costo por milla (de gasolina y aceite) es de $0.05. Si comprara el automóvil, el gasto fijo anual sería de $1,000, y los otros costos sumarían $0.10 por milla. ¿Cuál es el número mínimo de millas que tendría que conducir al año para hacer que la renta no fuera más costosa que la compra?

4. Un fabricante de camisas produce N artículos, con un costo total de mano de obra (en dólares) de $1.2N$ y un costo total de materiales de $0.3N$. Los gastos generales constantes para la planta son de $6,000. Si se vende cada camisa en $3, ¿cuántas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

5. El costo de publicación de cada ejemplar de una revista es de $0.65 (dólares). Se vende a los distribuidores a 0.60 cada una, y el ingreso que recibe por publicidad es 10% de la cantidad que recibiría por todos los ejemplares que publique arriba de un tiraje de 10,000. Determine el número mínimo de ejemplares que pueden publicarse sin pérdidas, es decir, tal que las utilidades sean ≥ 0 (Supóngase que se vende todo el tiraje.)

6. Una compañía fabrica relojes despertadores. Durante la semana normal de trabajo, el costo de la mano de obra para producir un reloj es de $2.00 (dólares). Sin embargo, si se fabrica un reloj en el tiempo extra, el costo de mano de obra es de $3.00. Los administradores han decidido invertir no más de un total de $25,000 a la semana en mano de obra. La compañía debe fabricar 11,000 relojes durante esa semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que

deben fabricarse durante la semana normal de trabajo?

7. Una compañía invierte un total de $30,000 (dólares) de fondos excedentes a dos tasas anuales de interés: 5% y $6\frac{3}{4}$ %. Desea obtener un rendimiento anual no inferior a $6\frac{1}{2}$ %. ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}$ %?

8. La razón de circulante de una empresa es 3.8. Si sus activos circulantes son de $570,000, ¿cuánto valen sus pasivos circulantes? Para obtener fondos adicionales, ¿cuál es la cantidad máxima que puede obtener a crédito, a corto plazo, si se desea que su razón de circulante no sea inferior a 2.6? (Véase el Ejemplo 3, que contiene una explicación de la razón de circulante.)

9. En la actualidad, un fabricante tiene 2,500 unidades de un producto en su almacén. El producto se vende en estos momentos a $4 (dólares) por unidad. Para el próximo mes, el precio unitario aumentará en $0.50. El fabricante desea que los ingresos totales que se obtengan por la venta de las 2500 unidades no sea inferior a $10,750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. Supóngase que los consumidores adquirirían q unidades de un producto a un precio de $\frac{100}{q} + 1$ (en dólares) por unidad. ¿Cuál es el número de unidades que se deben vender para que los ingresos sean superiores a $5,000?

11. Con frecuencia se paga a los pintores por hora o a destajo. La tarifa puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, supóngase que pueden trabajar por $8.50 por hora, o por $300 más $3 por cada hora, por debajo de 40, si terminan el trabajo en menos de 40 horas. Supóngase que un trabajo requeriría t horas. Si $t \geq 40$, resulta claro que es mejor la tarifa por hora. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t es mejor la tarifa por hora?

12. Supóngase que una compañía le ofrece un puesto en ventas, pudiendo usted elegir uno de dos planes para determinar su sueldo anual. Según un plan, recibiría $12,600, más un bono de 2% de las ventas anuales. Según el otro plan, recibiría una comisión directa de 8% sobre las ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor elegir el primero de los planes?

13. El secretario de asuntos estudiantiles de una universidad está haciendo arreglos para que un grupo de música "rock" ofrezca un concierto en las instalaciones. El grupo cobra una cuota total de $2,440 (dólares) o, por otro lado, una cuota de $1,000 más 40% de lo que se obtenga en taquilla. Es probable que asistan 800 estudiantes. Cuando mucho, ¿cuánto debe cobrar el secretario por cada boleto, de manera que el segundo plan no resulte más costoso que el de la cuota única? Si se cobra este máximo, ¿cuánto dinero sobrará para pagar la publicidad, los guardianes y otros gastos de la función?

3.4 Valor absoluto

En ocasiones resulta útil considerar, sobre la recta de números reales, la distancia que existe entre un número x y 0. A esta distancia se le denomina **valor absoluto** de x y se le denota mediante $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, porque tanto 5 como -5 se encuentran a 5 unidades de 0 (véase la Figura 3.14). De manera similar, $|0| = 0$.

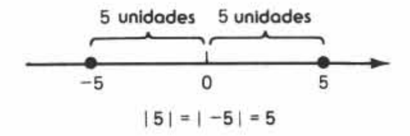


FIGURA 3.14

Si x es positiva, resulta claro que $|x| = x$. De la misma forma que $|-5| = 5 = -(-5)$, no debe resultar difícil para el lector convencerse de que si x es cualquier número negativo, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que se ha cambiado el signo de x. Por ello, aparte de su interpretación geométrica, el valor absoluto puede definirse de la siguiente manera:

DEFINICIÓN

*El **valor absoluto** de un número real x, que se denota por |x|, es*

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0, \\ -x, & si\ x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la definición, se tiene que $|3| = 3$; $|-8| = -(-8) = 8$; $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$; $-|2| = -2$; y $-|-2| = -2$. Obsérvese que $|x|$ siempre es positiva o cero; es decir, $|x| \geq 0$.

ADVERTENCIA

$\sqrt{x^2}$ no es necesariamente x, pero $\sqrt{x^2} = |x|$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, no -2. Esto concuerda con el hecho de que $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. También, $|-x| \neq x$ y $|-x - 1| \neq x + 1$. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$ y $|-(-3) - 1| \neq -3 + 1$.

EJEMPLO 1

Despejar x en cada ecuación

a. $|x - 3| = 2$.

Esta ecuación expresa que $x - 3$ es un número que se encuentra a dos unidades de cero. Por ello, puede ser que

$$x - 3 = 2 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = -2.$$

La resolución de estos planteamientos, da $x = 5$ y $x = 1$.

b. $|7 - 3x| = 5$.

La ecuación es cierta si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene $x =$ y $x = 4$.

c. $|x - 4| = -3$.

El valor absoluto de un número nunca es negativo. Por ello, el conjunto solución es $\varnothing$.

Los números 5 y 9 se encuentran a una distancia de 4 unidades. También,

$$|9 - 5| = |4| = 4,$$

$$|5 - 9| = |-4| = 4.$$

En general, se puede interpretar $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b.

Por ejemplo, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 es de 2 unidades. Por lo tanto, x puede ser 1 o bien 5, tal como se muestra en el Ejemplo 1(a) y en la Figura 3.15.

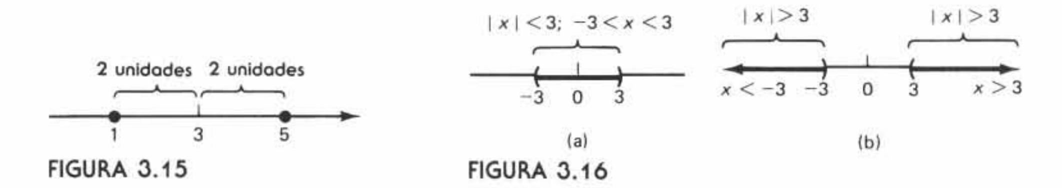


FIGURA 3.15

FIGURA 3.16

Ahora se volverá a las desigualdades. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades de 0. Por ello, x debe estar entre -3 y 3. Es decir, $-3 < x < 3$ [véase la Figura 3.16(a)]. Por otro lado, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del 0. De modo que existen dos casos: $x > 3$ o bien $x < -3$ [véase la Figura 3.16(b)]. Se pueden extender estas nociones. Si $|x| \leq 3$, entonces $-3 \leq x \leq 3$. Si $|x| \geq 3$, entonces $x \geq 3$ o bien $x \leq -3$.

En general, la solución de $|x| < d$ o bien $|x| \leq d$, en donde d es un número positivo, está formada por un intervalo, a saber: $-d < x < d$ o bien $-d \leq x \leq d$. Sin embargo, cuando $|x| > d$ o bien $|x| \geq d$, existen dos intervalos en la solución, $x < -d$ y $x > d$, o bien $x \leq -d$ y $x \geq d$.

EJEMPLO 2

Despejar x en cada una de las desigualdades.

a. $|x - 2| < 4$.

El número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del 0. Por el análisis anterior, esto significa que $-4 < x - 2 < 4$. Se puede establecer el procedimiento para resolver esta desigualdad de la siguiente manera:

$$-4 < x - 2 < 4,$$

$$-4 + 2 < x < 4 + 2 \qquad \text{(sumando 2 a cada miembro)},$$

$$-2 < x < 6.$$

Entonces, la solución es $-2 < x < 6$. Lo anterior significa que todos los números que se encuentran entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original (véase la Figura 3.17).

$-2 < x < 6$

−2 6

FIGURA 3.17

b. $|3 - 2x| \leq 5$.

$$-5 \leq 3 - 2x \leq 5,$$

$$-5 - 3 \leq -2x \leq 5 - 3 \qquad \text{(restando 3 de cada miembro)},$$

$$-8 \leq -2x \leq 2,$$

$$4 \geq x \geq -1 \qquad \text{(dividiendo cada miembro entre } -2\text{)},$$

$$-1 \leq x \leq 4 \qquad \text{(reordenando)}.$$

Nótese que se *invirtió* el sentido de la desigualdad original al dividir entre un número negativo.

EJEMPLO 3

Despejar x en cada desigualdad.

a. $|x + 5| \geq 7$.

Aquí, $x + 5$ debe estar cuando *menos* a 7 unidades del 0. Por ello, $x + 5 \leq -7$ o bien $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ o bien $x \geq 2$ (véase la Figura 3.18).

$x \leq -12, \quad x \geq 2$

$-12 \qquad 2$

FIGURA 3.18

b. $|3x - 4| > 1$.

Aquí puede ser que $3x - 4 < -1$ o bien $3x - 4 > 1$. Por consiguiente, $3x < 3$ o bien $3x > 5$. En consecuencia, $x < 1$ o bien $x > \frac{5}{3}$.

EJEMPLO 4

Utilizando la notación de valor absoluto, expresar simbólicamente los siguientes planteamientos:

a. x está a menos de 3 unidades de 5.

$$|x - 5| < 3.$$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

$$|x - 6| \geq 7.$$

c. $x < 3$ y $x > -3$ simultáneamente.

$$|x| < 3.$$

d. x está a más de una unidad de -2.

$$|x - (-2)| > 1,$$

$$|x + 2| > 1.$$

x está a menos de σ (la letra griega "sigma") unidades de μ (la letra griega "mi").

$$|x - \mu| < \sigma.$$

Enseguida se presentan tres propiedades básicas del valor absoluto:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

3. $|a - b| = |b - a|$.

EJEMPLO 5

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21; |(-7)(-3)| = |-7| \cdot |-3| = 21.$

b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2.$

c. $|7 - x| = |x - 7|.$

d. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}; \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}.$

e. $\left|\frac{x - 3}{-5}\right| = \frac{|x - 3|}{|-5|} = \frac{|x - 3|}{5}.$

EJERCICIOS 3.4

En los Problemas **1-10**, *escriba una forma equivalente sin el símbolo de valor absoluto.*

1. $|-13|$. **2.** $|2^{-1}|$. **3.** $|8 - 2|$. **4.** $|(-4 - 6)/2|$.

5. $|3(-\frac{5}{3})|$. **6.** $|2 - 7| - |7 - 2|$. **7.** $|x| < 3$. **8.** $|x| < 10$.

9. $|2 - \sqrt{5}|$. **10.** $|\sqrt{5} - 2|$.

11. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese cada planteamiento.

a. x está a menos de 3 unidades de 7.
b. x difiere de 2 en menos de 3.
c. x está a no más de 5 unidades de 7.
d. La distancia entre 7 y x es 4.
e. $x + 4$ está a menos de 2 unidades de 0.
f. x está entre -3 y 3 pero no es igual ni a 3 ni a -3.
g. $x < -6$ o bien $x > 6$.
h. $x - 6 > 4$ o bien $x - 6 < -4$.
i. El número de horas, x, que una máquina opera en forma eficiente, difiere de 105 en menos de 3.
j. El ingreso promedio mensual, x, (en dólares) de una familia difiere de 850 en menos de 100.

12. Utilice la notación de valor absoluto para señalar que x y μ difieren en un valor no mayor de σ.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2, de dos productos, no pueden diferir en más de 2 (unidades monetarias cualesquiera).

14. Encuentre todos los valores de x tales que $|x - \mu| \leq 2\sigma$.

En los Problemas **15-36**, *resuelva la desigualdad o la ecuación dada.*

15. $|x| = 7$. **16.** $|-x| = 2$. **17.** $\left|\frac{x}{3}\right| = 2$. **18.** $\left|\frac{4}{x}\right| = 8$.

19. $|x - 5| = 8$. **20.** $|4 + 3x| = 2$. **21.** $|5x - 2| = 0$. **22.** $|7x + 3| = x$.

23. $|7 - 4x| = 5$. **24.** $|1 - 2x| = 1$. **25.** $|x| < 4$. **26.** $|-x| < 3$.

27. $\left|\frac{x}{4}\right| > 2$. **28.** $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}$. **29.** $|x + 7| < 2$. **30.** $|5x - 1| < -6$.

31. $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$. **32.** $|1 - 3x| > 2$. **33.** $|5 - 2x| \leq 1$. **34.** $|4x - 1| \geq 0$.

35. $\left|\frac{3x - 8}{2}\right| \geq 4$. **36.** $\left|\frac{x - 8}{4}\right| \leq 2$.

37. En análisis estadístico, la desigualdad de Tchebyscheff (o Chebyshev) establece que si x es una variable aleatoria, μ es su media y σ es su desviación estándar, entonces

$$(\text{probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \leq \frac{1}{h^2}.$$

Determine los valores de x para los cuales $|x - \mu| > h\sigma$.

38. En la fabricación de unos artefactos, la dimensión promedio de una parte es de 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una parte no difiere del promedio en más de 0.005 cm.

3.5 Repaso

TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

Sección 3.1 costos fijos   gastos generales   costos variables   costos totales   ingresos totales   utilidades

Sección 3.2 $a < b$ $a \leq b$ $a > b$ $a \geq b$ $a < x < b$ desigualdad   sentido de una desigualdad   desigualdad equivalente   desigualdad lineal $-\infty < x < \infty$ intervalo abierto   intervalo cerrado

Sección 3.4 valor absoluto, $|x|$

RESUMEN

Cuando se tiene un problema expresado en forma verbal no se da una ecuación. Más bien, se le debe plantear traduciendo los datos verbales a una ecuación (o desigualdad). A esto se le denomina *modelación matemática*. Es importante leer primero el problema más de una vez para comprender claramente qué datos se proporcionan y qué es lo que se pide calcular o determinar. Después, se elige una letra para representar la cantidad desconocida que se desea hallar. Se utilizan las relaciones y los hechos que se dan en el problema y se les traduce a una ecuación que incluye la letra. Finalmente se resuelve la ecuación y se ve si la solución contesta lo que se pedía. En ocasiones, la solución de la *ecuación* no es la respuesta para el *problema*, pero puede resultar útil para obtenerla.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son:

$$\text{costos totales} = \text{costos variables} + \text{costos fijos}$$

$$\text{ingresos totales} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

$$\text{utilidades} = \text{ingresos totales} - \text{costos totales}.$$

Los símbolos $<$, $\leq$, $>$, y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, que es una afirmación de que un número es, por ejemplo, menor que otro número. Tres operaciones básicas que, cuando se aplican a una desigualdad, garantizan el tener otra desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número en ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo, e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones sirven para resolver desigualdades lineales (aquéllas que se pueden expresar en la forma $ax + b < 0$ o bien $ax + b \leq 0$, en donde $a \neq 0$).

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad |x| = -x, \text{ si } x < 0.$$

Se interpreta $|a - b|$ o bien $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución para la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo expresado por $-d < x < d$. La solución a $|x| > d$ consiste en dos intervalos, a saber los que están dados por $x < -d$ y $x > d$. Tres propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$,
3. $|a - b| = |b - a|$.

PROBLEMAS DE REPASO

En los Problemas **1-15** *resolver la ecuación o desigualdad.*

1. $3x - 8 \geq 4(x - 2)$.

2. $2x - (7 + x) \leq x$.

3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$.

4. $-2(x + 6) > x + 4$.

5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$.

6. $2(4 - \frac{3}{5}q) < 5$.

7. $\dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{1}{2} \leq 2$.

8. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} < \dfrac{x}{4}$.

9. $\dfrac{1}{4}s - 3 \leq \dfrac{1}{8}(3 + 2s)$.

10. $\dfrac{1}{3}(t + 2) \geq \dfrac{1}{4}t + 4$.

11. $|3 - 2x| = 7$.

12. $\left|\dfrac{5x - 8}{13}\right| = 0$.

13. $|4t - 1| < 1$.

14. $4 < \left|\dfrac{2}{3}x + 5\right|$.

15. $|3 - 2x| \geq 4$.

16. Una utilidad de 40% sobre el precio de venta de un producto, ¿es equivalente a qué utilidad porcentual sobre el costo?

17. Cierto día se negociaron 1132 emisiones diferentes en la bolsa de valores de Nueva York. Había 48 emisiones que mostraban más un aumento que disminución, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron reducciones?

18. El impuesto sobre la renta en cierto estado es de 6%. Si se tiene un total de \$3017.29 en compras, incluyendo impuestos, en el curso de un año, ¿qué tanto de esa cantidad corresponde al impuesto?

19. Una compañía fabricará un total de 10,000 unidades de un producto en las fábricas A y B. Los datos disponibles se muestran en la tabla que aparece enseguida.

	Fábrica A	Fábrica B
Costo unitario por mano de obra y material	\$5	\$5.50
Costos fijos	\$30,000	\$35,000

La compañía ha decidido asignar entre las dos plantas no más de \$117,000 (dólares) para los costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que se deben fabricar en la planta industrial A?

20. Una compañía va a remplazar dos tanques cilíndricos de almacenamiento de petróleo, por otro tanque nuevo. Los tanques antiguos tienen cada uno 16 pie de altura. Uno tiene un radio de 15 pie, y el otro, de 20. El tanque nuevo tendrá también 16 pie de altura. Determine su radio si debe tener el mismo volumen que los dos tanques reemplazados juntos. (*Sugerencia:* El volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, en donde r es el radio y h es la altura.)



APLICACIÓN PRÁCTICA

Grabación de calidad en video grabadoras*

Lo que sigue es un entretenido análisis de la grabación con videograbadoras e ilustra los conceptos matemáticos de este capítulo.

Si usted es una de las millones de personas que poseen una grabadora de videocasetes (VCR, de *videocassette recorder)* habrá presenciado cuán conveniente es grabar programas de televisión para verlos posteriormente. Aquí aprenderá cómo lograr una grabación de mejor calidad con esta maravilla para el entretenimiento casero.

Si su VCR tiene un formato VHS, es muy probable que tenga la alternativa de elegir las velocidades de operación stándar (SP), larga (LP) o superlarga o extendida (SLP/ EP). La SP (*Standard play*) en la velocidad mayor y ofrece la mejor calidad de imagen. La LP (*Long play*) es una velocidad menor que ofrece también menor calidad de grabación, y la SLP (*Super long play*) que es la más lenta, ofrece la menor calidad de imagen. Con la videocinta común T-120, el tiempo máximo de grabación en SP es de 2 horas. En LP, es de 4 y en SLP, es de 6 horas. En el análisis que sigue puede suponerse que estos tiempos de grabación son exactos y que la cantidad de cinta por utilizar cambia de manera uniforme con el tiempo de grabación.

Si se desea grabar una película que no tenga más de 2 horas de duración, es evidente que debe utilizarse SP para lograr la mejor calidad de imagen. Sin embargo, para la grabación de una película de 3 horas en una sola cinta T-120, el utilizar sólo la velocidad SP podría resultar en que se llenara la cinta una hora antes de la terminación de la película. Se puede resolver esta dificultad utilizando en SP/VE, junto con otra velocidad, para asegurarse de que se maximiza el tiempo en SP.

Por ejemplo, puede comenzarse en LP, y después, terminar la grabación en SP/VE. Es evidente que el problema consiste en determinar cuándo se debe realizar el cambio a SP. Si t representa el tiempo, en horas, en que se utiliza LP, entonces faltaría por grabar $3 - t$ horas de película. Como la rapidez de la cinta en la modalidad LP es de 1/4 de cinta por hora, y en SP es de 1/2 cinta por hora, la porción de cinta que se utiliza en LP es $t/4$ y la porción que se emplea en SP es $(3 - t)/2$.

* Adaptado de Gregory N. Fiore, "An Application of Linear Equations to the VCR", *Mathematics Teacher,* 81 (octubre 1988), 570-72. Con autorización de the National Council of Teachers of Mathematics.

La suma de estas porciones debe dar la unidad porque hay que usar la totalidad de la cinta. Por lo tanto, es necesario resolver una ecuación lineal:

$$\frac{t}{4} + \frac{3 - t}{2} = 1,$$

$$t + 2(3 - t) = 4,$$

$$6 - t = 4,$$

$$t = 2.$$

Por ello, se debe grabar en LP durante 2 horas, y después cambiar a VE para el tiempo restante: $3 - t = 3 - 2 = 1$ hora. Esto significa que una tercera parte de la película quedará registrada con la mejor calidad de imagen.

En vez de limitarse a una película de 3 horas, puede generalizarse el problema anterior para manejar una película que dure l horas, en donde ($2 < l \geq 4$). Esta situación da como resultado:

$$\frac{t}{4} + \frac{l - t}{2} = 1,$$

Cuya solución es

$$t = 2l - 4.$$

En forma alternativa, se podría pensar que no hay gran diferencia entre las calidades de imagen con las velocidades LP y SLP. Si se desea comenzar en SLP y terminar con SP, se podría manejar una película de longitud l, en donde ($2 < l \geq 6$). Si se utiliza t para representar el tiempo, en horas, durante el que se utiliza SLP, entonces

$$\frac{t}{6} + \frac{l - t}{2} = 1,$$

$$t + 3(l - t) = 6,$$

$$-2t + 3l = 6,$$

$$3l - 6 = 2t,$$

$$t = \frac{3}{2}l - 3.$$

Por ejemplo, con una película de 3 horas, se grabaría en SLP durante $t = 3/2(3) - 3 = 1\ 1/2$ horas, y después en SP durante $3 - 1\ 1/2 = 1\ 1/2$ horas. Esto indica que utilizar SLP en vez de LP produce, $1/2$ horas más de grabación de calidad en SP. Como otro ejemplo, considérese la grabación de una película que dura 4 horas y 20 minutos. Aquí, $l = 4\ 1/3$ horas, por lo que se utilizaría VSL durante

$$t = \frac{3}{2}\left(\frac{13}{3}\right) - 3 = 3\tfrac{1}{2} \text{ horas}$$

y se utilizaría SP durante el resto de la película.

Finalmente, supóngase que un programa de televisión tiene interrupciones comerciales, pero que se desea grabarlo eliminando los anuncios. Se puede manejar esto deteniendo la videograbadora VCR al comienzo del anuncio y volviendo a arrancar cuando termine. Suponiendo que se estima

que cada hora de un programa que dura l horas contiene c minutos de información comercial, entonces el tiempo total de anuncios en horas, es $lc/60$. Así que la longitud del programa continuo, sin comerciales, en horas es

$$l - \frac{lc}{60}.$$

Si se comienza grabando en SLP y después se cambia a SP, se tendrá

$$\frac{t}{6} + \frac{l - \frac{lc}{60} - t}{2} = 1,$$

en donde t es el tiempo, en horas, a SLP. Resolviendo esto se obtiene,

$$t + 3\left(l - \frac{lc}{60} - t\right) = 6,$$

$$t + 3l - \frac{lc}{20} - 3t = 6,$$

$$-2t = -3l + \frac{lc}{20} + 6$$

$$t = \frac{3}{2}l - \frac{c}{40}l - 3.$$

Por ejemplo, considérese un programa de 3 horas que tiene 6 minutos de comerciales por hora; es decir $l = 3$ y $c = 6$, por lo que

$$t = \frac{3}{2}(3) - \frac{6}{40}(3) - 3$$

$$= \frac{21}{20} \text{ hora}$$

$$= 1 \text{ hora y } 3 \text{ minutos}$$

Por ejemplo, considérese un programa de 3 horas que tiene 6 minutos de anuncios por hora; es decir, $l = 3$ y $c = 6$, por lo que

EJERCICIOS

1. Si se utilizan las velocidades LP y SP para grabar una película de 2½ horas, ¿qué tanto tiempo después de comenzar la película se debe cambiar de LP a SP?

2. Si se utilizan las modalidades SLP y SP para grabar un programa de 2½ horas, ¿cuántos minutos después del comienzo del programa se debe cambiar de SLP a SP?

3. Si se utilizan las modalidades de SLP y SP para grabar una película que dura dos horas y 40 minutos, ¿qué tanto tiempo después del principio de la película se debe cambiar de SLP a SP?

4. Se utilizan las modalidades de SLP y LP a fin de grabar una película de 3 horas. ¿Qué tanto tiempo después del inicio de la película se debe cambiar de SLP a SP, si el telespectador elimina 8 minutos de comerciales cada hora?

5. Resuelva de nuevo el Problema 4 si se utilizan las modalidades SP y LP